CORSO DI FISICA GENERALE

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

LEZIONE N. 20

Prof. Giuseppe Ciancio

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Forza gravitazionale terrestre

Tutti i corpi sono soggetti all'attrazione gravitazionale da parte della Terra, diretta verso il centro della Terra

In prossimità della superficie terrestre la forza di gravità è diretta verso il basso (forza peso) e vale:

$$\vec{P} = m\,\vec{g}$$

Effetto identico alla cometa o a un meteorite ma…

Un corpo lasciato libero di cadere in prossimità della superficie terrestre si muove con accelerazione pari all'accelerazione di gravità

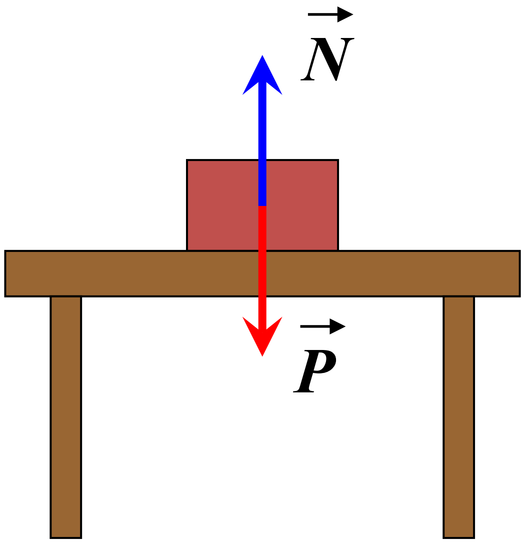
L'accelerazione di gravità è in modulo pari a $g=9{,}81\ m/s^2$ ed è diretta verso il basso

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Reazione vincolare

Quando un corpo preme contro una superficie, questa si oppone esercitando una reazione ad essa perpendicolare

- La reazione normale impedisce che il corpo attraversi la superficie



Per effetto del suo peso, il blocco tenderebbe a penetrare nel tavolo, che si oppone esercitando una reazione normale e lo mantiene in equilibrio

$$\vec{P} + \vec{N} = 0$$

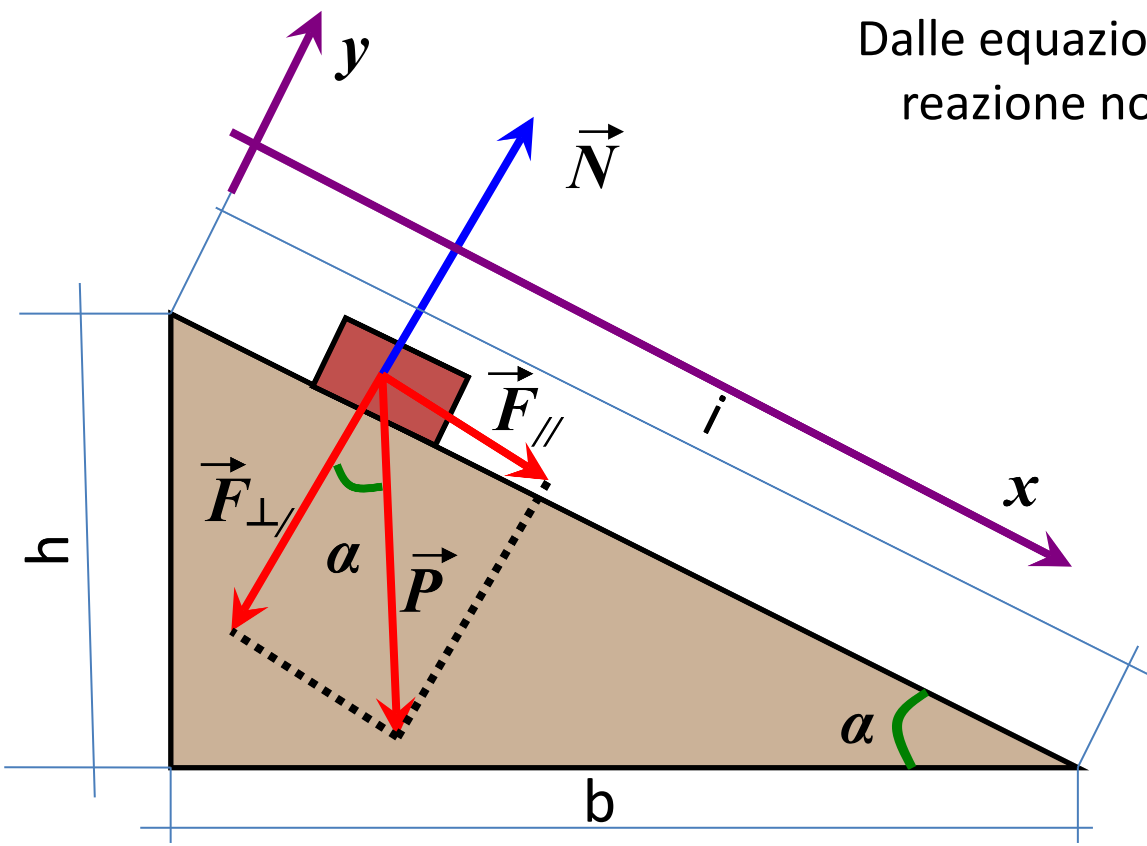
$$N - P = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Discesa su un piano inclinato liscio

Consideriamo un blocco di massa M *su un piano inclinato liscio*

Seconda legge di Newton: $$\vec{P} + \vec{N} = m\,\vec{a}$$



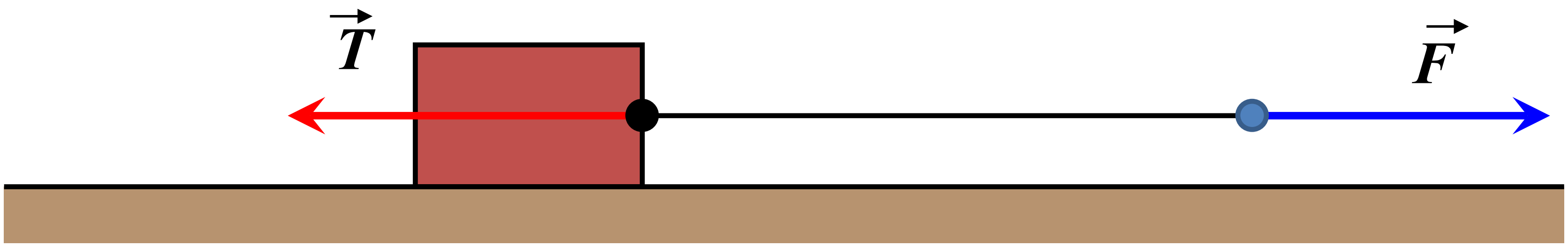
Dalle equazioni del moto si calcolano la reazione normale e l'accelerazione:

$$\begin{cases} h : F_{//} = i : P \Rightarrow F_{//} = P\dfrac{h}{l} \\[2ex] b : F_{\perp} = i : P \Rightarrow F_{\perp} = P\dfrac{b}{l} \\[2ex] N - F_{//} = 0 \Rightarrow N = P\dfrac{h}{l} \\[2ex] F_{\perp} = ma \Rightarrow P\dfrac{b}{l} = ma \Rightarrow a = P\dfrac{b}{ml} \end{cases}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

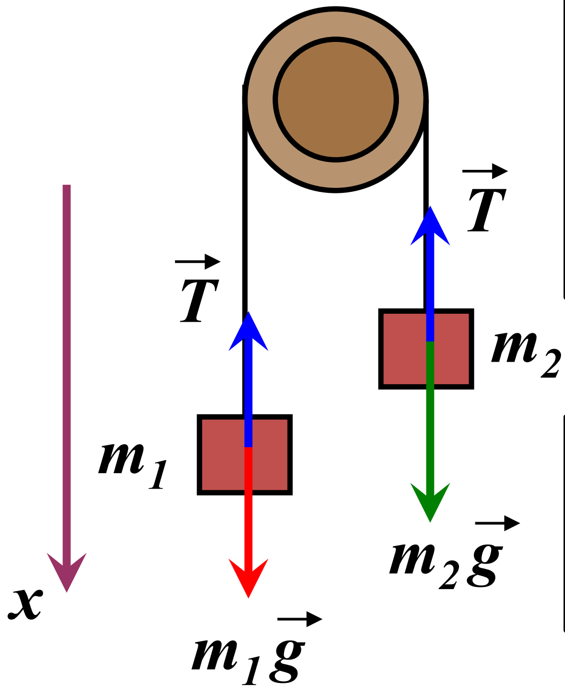
Tensione

- **In un filo (o una fune, una corda, un cavo...) inestensibile, l'applicazione di una forza ad una estremità genera per reazione delle forze di tensione interne al filo, in modulo pari alla forza applicata (T=F)**



DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Macchina di Atwood



La macchina di Atwood è costituita da due blocchi collegati da un filo inestensibile che può scorrere su una carrucola fissa di massa trascurabile

Scegliendo un asse x come in figura si può scrivere:

$$m_1 g - T = m_1 a_1$$

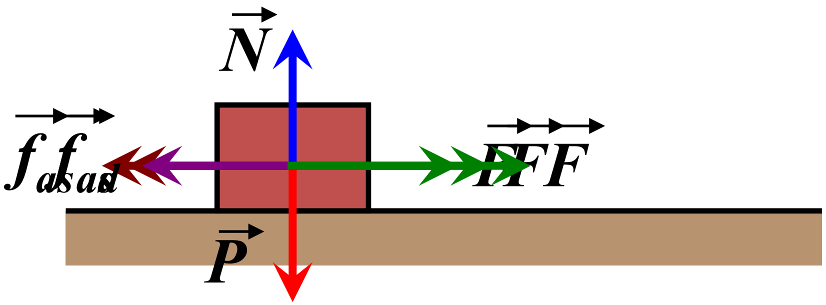
$$m_2 g - T = m_2 a_2$$

$$a_2 = -a_1$$

$$a_1 = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \qquad a_2 = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \qquad T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE
Forze di attrito

Consideriamo un blocco di massa m poggiato su un piano orizzontale, a cui viene applicata una forza F orizzontale



- ➢ Per valori piccoli di F il blocco rimane fermo
- ✓ Il piano esercita sul blocco una forza f_{as} (detta forza di attrito statico) opposta a F, che mantiene il blocco in equilibrio
- ➢ Aumentando F il blocco rimane fermo finchè $F \leq F_{max}$
- ✓ La forza di attrito statico non è costante, ma cresce con F fino ad un valore massimo $f_{as,max}=F_{max}$
- ➢ Se $F > F_{max}$ il blocco inizia a muoversi con $a > (F-F_{max})/m$
- ✓ In questa fase il piano esercita sul blocco una forza di attrito dinamico $f_{ad} < f_{as,max}$

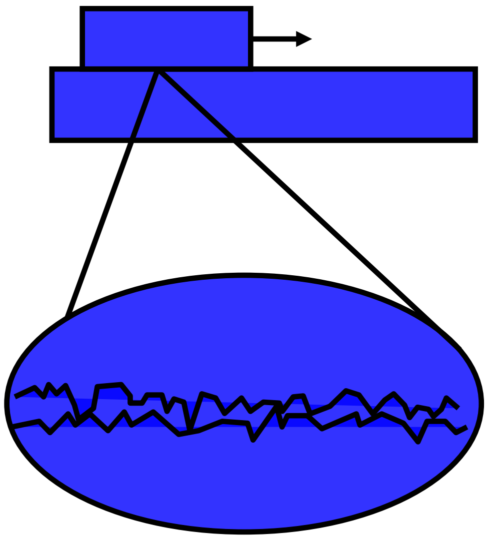
DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Origine delle forze di attrito

La forza di attrito è dovuta alle interazioni tra gli atomi delle superfici dei corpi a contatto

A causa delle scabrosità, l’area di contatto effettiva è circa 10^4 volte minore dell’area apparente

Si creano microsaldature tra gli atomi che si oppongono allo slittamento delle due superfici (<u>attrito statico</u>)



Se si cerca di far slittare le due superfici, si provoca uno stiramento delle saldature e, dopo lo strappo iniziale, una serie di risaldature e strappi (<u>attrito dinamico</u>)

Se si premono con più forza le due superfici, l’area effettiva di contatto aumenta, e quindi aumentano le forze di attrito

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Proprietà delle forze di attrito

L'intensità della forza di attrito statico può raggiungere un valore massimo $f_{as,max}$ dato da:

$$f_{as} \leq f_{as,max} = \mu_s N$$

N = intensità della forza normale
μ_s = coefficiente di attrito statico

L'intensità della forza di attrito dinamico f_{ad} è sempre data da:

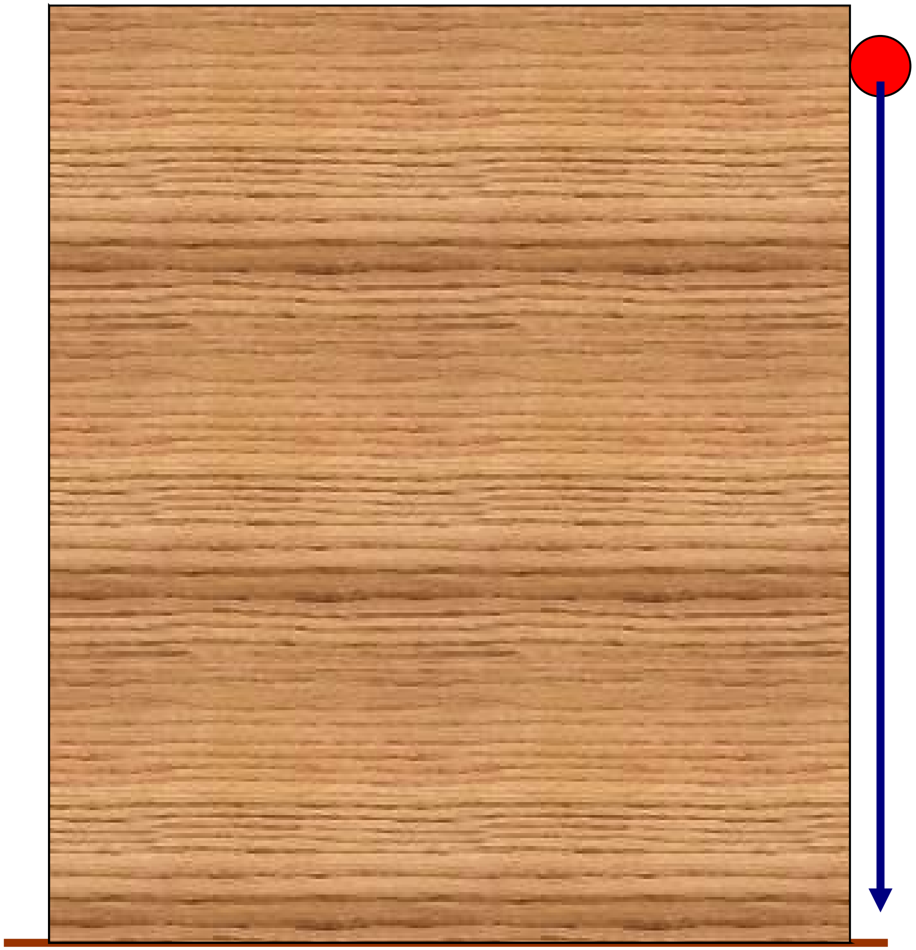
$$f_{ad} = \mu_d N$$

μ_d = coefficiente di attrito dinamico

In genere si ha: $\mu_d < \mu_s$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Il piano inclinato



$$a = g$$

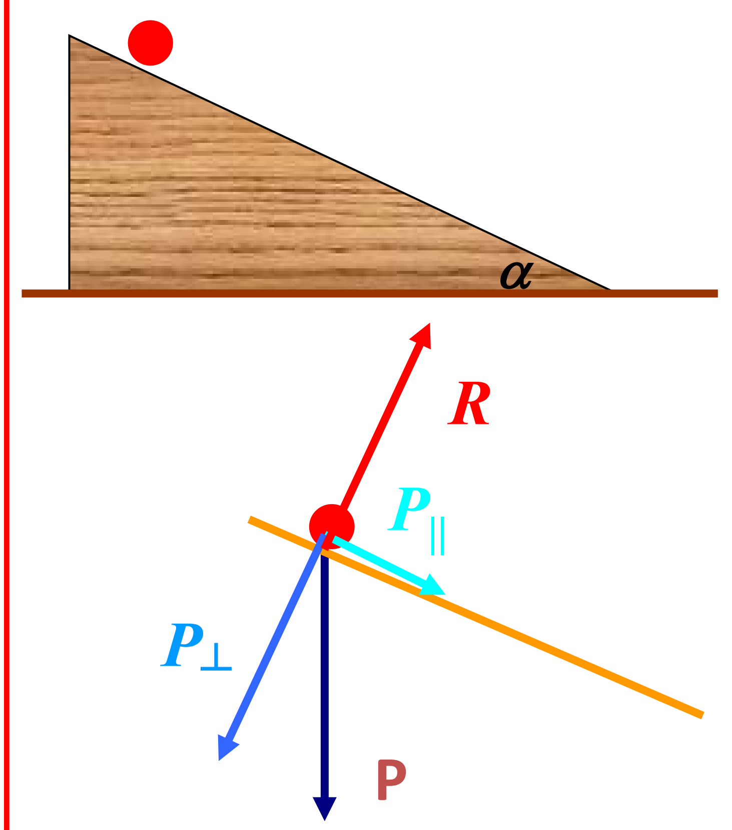
DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Il piano inclinato

$$P = P_{\perp} + P_{\|}$$

$$P_{\perp} + R = 0$$ (azione=reazione)

$$P_{\perp} \bullet P_{\|} = 0$$ (ortogonalità)



$\vec{P} = m\vec{g} \rightarrow \vec{P}_{||} < m\vec{g} \rightarrow \vec{a} < \vec{g}$

$\vec{F} = m\,\vec{a} = \vec{P}_{||} \rightarrow \vec{a} = \vec{P}_{||} / m$

Moto uniformemente accelerato, con accelerazione minore di g.

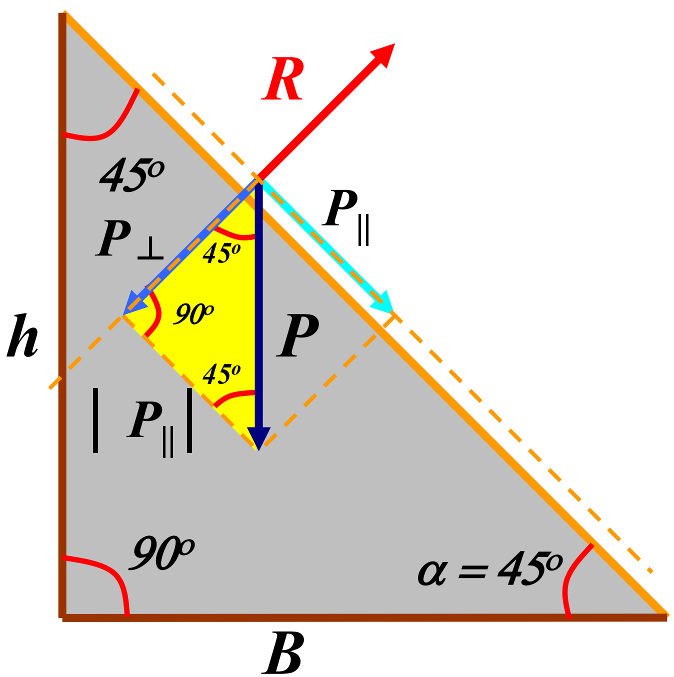
$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

$$v = at + v_0$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Il piano inclinato a 45°

In particolare quando il piano inclinato è a 45°, il triangolo diviene rettangolo con i due cateti uguali.



Sul corpo agiscono due forze quella peso P e la reazione del vincolo.

Scomponendo la forza peso P in due direzioni otteniamo le componenti $P_\perp$ e $P_{//}$.

I due triangoli in figura hanno gli stessi angoli e quindi sono equivalenti, pertanto anche quello usato per la scomposizione delle forze è equilatero.

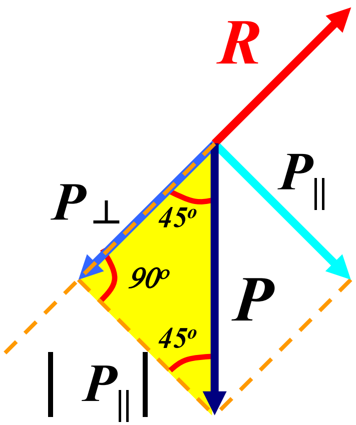
di conseguenza: $\mathbf{P_\perp = P_{||}}$

ricordando: **F = ma** e **P = mg**

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Il piano inclinato a 45°

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo delle forze:



$$\vec{P}^2 = \vec{P}_\perp^{\,2} + \vec{P}_\parallel^{\,2}$$

Essendo P⊥ = P|| si ottiene:

$$\vec{P}^2 = 2 \cdot \vec{P}_\parallel^{\,2}$$

Risolvendo rispetto a P || si ottiene

$$\vec{P}_\parallel = \sqrt{\frac{\vec{P}^2}{2}} = \frac{\vec{P}}{\sqrt{2}}$$

Ricordando P = mg

Considerando F = ma, di conseguenza

$$\vec{P}_\parallel = \frac{m \cdot \vec{g}}{\sqrt{2}} = m\frac{9{,}81}{1{,}41} = m \cdot 6{,}94 [N] \qquad \cancel{m}a = \cancel{m} \cdot 6{,}94 \Rightarrow$$

<u>a=6,94</u> [m/s^2]

$$\vec{P}_\parallel = \frac{m \cdot \vec{g}}{\sqrt{2}} = m\frac{g}{1{,}41} = 0.71 \cdot m \cdot g [N] \qquad \cancel{m}a = 0.71 \cdot \cancel{m} \cdot g \Rightarrow$$

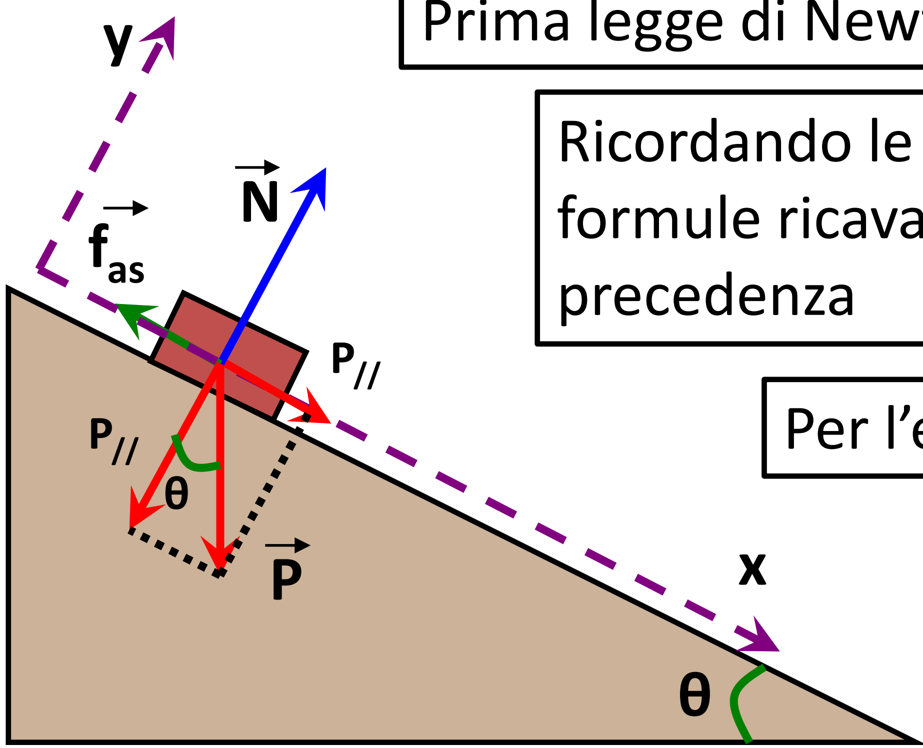
a=0,71•g [m/s^2]

Conclusione : l'accelerazione di un corpo su di un piano inclinato a 45° è pari **<u>a=6,94</u>** [m/s^2] o che è la stessa cosa **a=0,71•g**.

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Equilibrio su un piano inclinato scabro

Consideriamo un blocco di massa M poggiato su un piano inclinato scabro e calcoliamo il minimo valore di μ_s affinchè il corpo non scenda.



Prima legge di Newton:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_{as} = 0$$

Ricordando le formule ricavate in precedenza

$$\begin{cases} \vec{P}_{//} = \vec{P} \cdot \dfrac{h}{l} = m \cdot \vec{g} \cdot \dfrac{h}{l} \\ \vec{P}_{\perp} = \vec{N} = \vec{P} \cdot \dfrac{b}{l} = m \cdot \vec{g} \cdot \dfrac{b}{l} \end{cases}$$

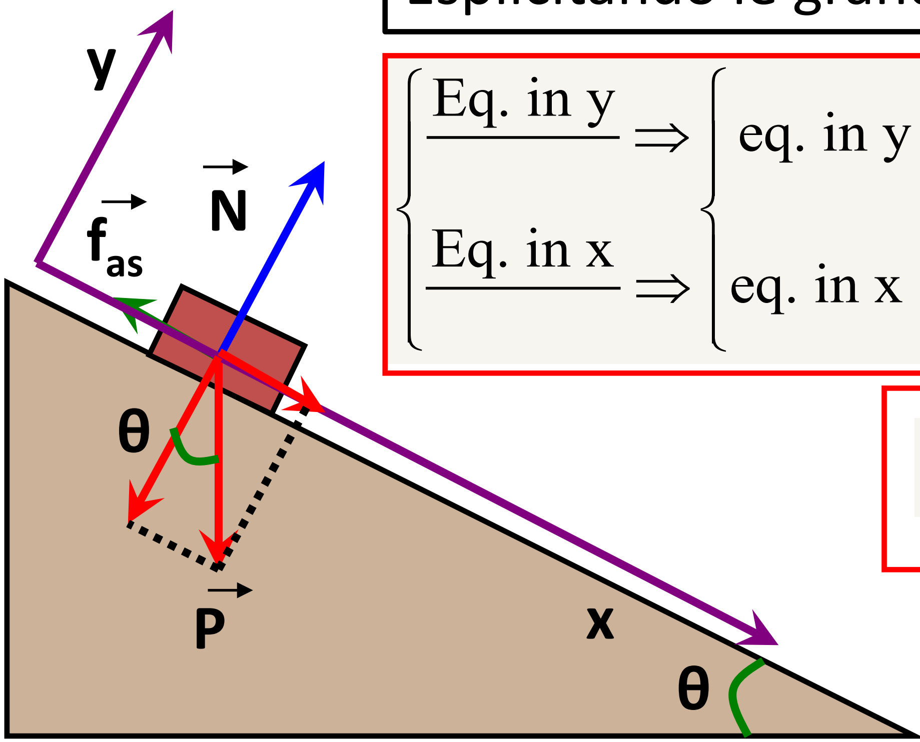
Per l'equilibrio nella direzione x e y

$$\text{in x} \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_{as} = \vec{P}_{//}$$

$$\text{in y} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \vec{P}_{\perp}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Equilibrio su un piano inclinato scabro



Esplicitando le grandezze per l'equilibrio si ottiene:

$$\begin{cases} \underline{\text{Eq. in y}} \Rightarrow \\ \underline{\text{Eq. in x}} \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \text{eq. in y} \Rightarrow \quad \mathrm{N} - m \cdot \vec{g} \cdot \frac{b}{l} = 0 \\ \text{eq. in x} \Rightarrow \quad m \cdot \vec{g} \cdot \frac{h}{l} - \mathrm{f}_{as} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{N} = m \cdot \vec{g} \cdot \frac{b}{l} \\ \mathrm{f}_{as} = m \cdot \vec{g} \cdot \frac{h}{l} \end{cases}$$

$$\vec{\mathrm{f}}_{as} = \eta_s \cdot \vec{\mathrm{N}}$$

$$\vec{\mathrm{f}}_{as} = \eta_s \cdot m \cdot \vec{g} \cdot \frac{b}{l}$$

Imponendo:

$$\vec{\mathrm{f}}_{as} \geq \vec{\mathrm{P}}_{//}$$

Sostituendo:

$$\eta_s \cdot \cancel{m} \cdot \cancel{\vec{g}} \cdot \frac{b}{\cancel{l}} = \cancel{m} \cdot \cancel{\vec{g}} \cdot \frac{h}{\cancel{l}}$$

$$\eta_s \cdot b = h$$

$$\eta_s = \frac{h}{b}$$

Approfondimento (esprimendo in funzione sen e cos si ottiene:

$$\begin{matrix} h = \sin\theta \\ b = \cos\theta \end{matrix}$$

$$\frac{h}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \mathrm{tg}\theta$$

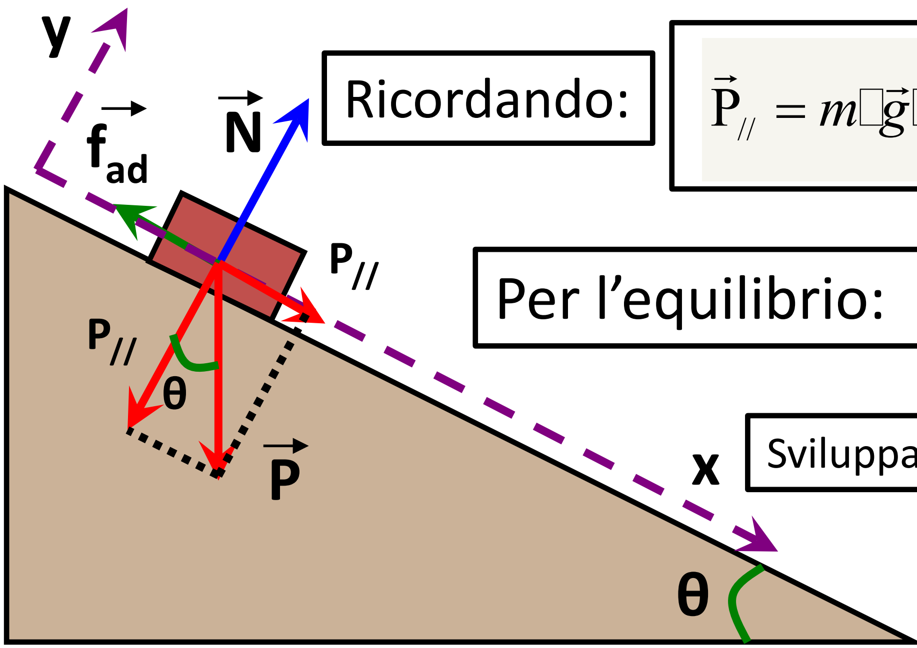
$$\mu_s \geq \mathrm{tg}\theta$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Discesa su di un piano inclinato scabro

Consideriamo un blocco di massa M su un piano inclinato scabro

Seconda legge di Newton: ➡ $\vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_{ad} = M\,\vec{a}$



Ricordando:

$$\vec{P}_{//} = m \cdot \vec{g} \cdot \frac{h}{l}$$

$$\vec{N} = m \cdot \vec{g} \cdot \frac{b}{l}$$

$$\vec{f}_{ad} = \eta_d \cdot m \cdot \vec{g} \cdot \frac{b}{l}$$

Per l'equilibrio:

$$\begin{cases} \vec{N} - \vec{P}_{//} = 0 \\ \vec{P}_{//} - \vec{f}_{ad} = m\vec{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{N} - \vec{P}_{//} = 0 \\ \vec{P}_{//} - \vec{f}_{ad} = m\vec{a} \end{cases}$$

Sviluppando la seconda equazione e semplificando

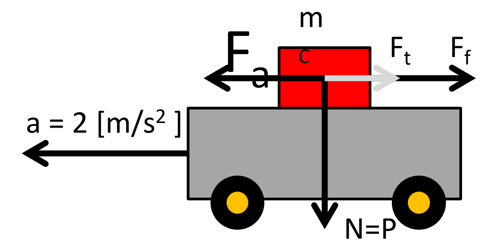
$$\cancel{m} \cdot \vec{g} \cdot \frac{h}{\cancel{l}} - \eta_d \cdot \cancel{m} \cdot \vec{g} \cdot \frac{b}{\cancel{l}} = \cancel{m}\vec{a}$$

Si determina l'equazione per l'accelerazione: ➡ $\boxed{\vec{a} = \vec{g} \cdot (h - \eta_d \cdot b)}$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

(moto relativo con attrito)

Esercizio:
Un corpo di massa m=100 [g] è appoggiato su un carrello che inizia a muoversi accelerando con a = 2 [m/s^2]. Se il coefficiente di attrito tra il corpo ed il carrello è η_d =0.05, quale è la velocità del corpo rispetto al carrello dopo Δt=1 [s] ?



Dati: m=100 [g] = 0,100 [kg] a = 2 [m/s^2] η_d =0.05 Δt=1 [s] ?

Soluzione

Sul corpo agisce una forza pari a	F_f=ma=0,1*2= 0,2 [N]
La forza N normale al piano è la forza peso:	N=mg=0,1*9,81=0,981 [N]
La forza di attrito è:	F_a= η_d *N=0,05*0,981=0,049 [N]
La forza risultante che agisce sul corpo vale:	F_t=F_f-F_a=0,2-0,051=0,149 [N]
L'accelerazione del corpo sul carrello è:	F_t=ma → a=0,149 /0,1=1,49 [m/s^2]
Dall'accelerazione si ricava la velocità:	V=a•Δt=1,49*1=1,49 [m/s]

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Resistenza aerodinamica

Un corpo che si muove in un fluido subisce una <u>forza di resistenza aerodinamica</u> (attrito col fluido) di modulo pari a:

$$D = \frac{1}{2} \bullet C \bullet A \bullet \rho \bullet v^2$$

C = **coefficiente aerodinamico del corpo in moto.**

A = **area efficace della sezione trasversale che subisce la resistenza**

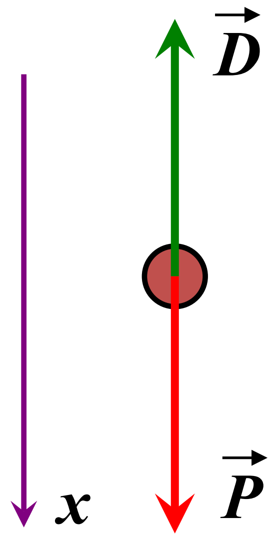
v = **velocità del corpo**

ρ = **densità del fluido definita come massa/Volume**

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Velocità limite

Consideriamo un corpo di massa M in caduta libera in aria



Partendo da fermo il corpo accelera in base alla seconda legge di Newton:

$$\vec{P} + \vec{D} = M\,\vec{a}$$

Aumentando la velocità cresce anche la resistenza aerodinamica, finchè si raggiunge un <u>valore limite di velocità</u> in cui la resistenza aerodinamica è pari in modulo alla forza peso <u>P=D</u> di conseguenza a=0:

$$\vec{P} + \vec{D} = 0 \Rightarrow Mg - \frac{1}{2} C\,A\,\rho\,v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Mg}{CA\rho}}$$

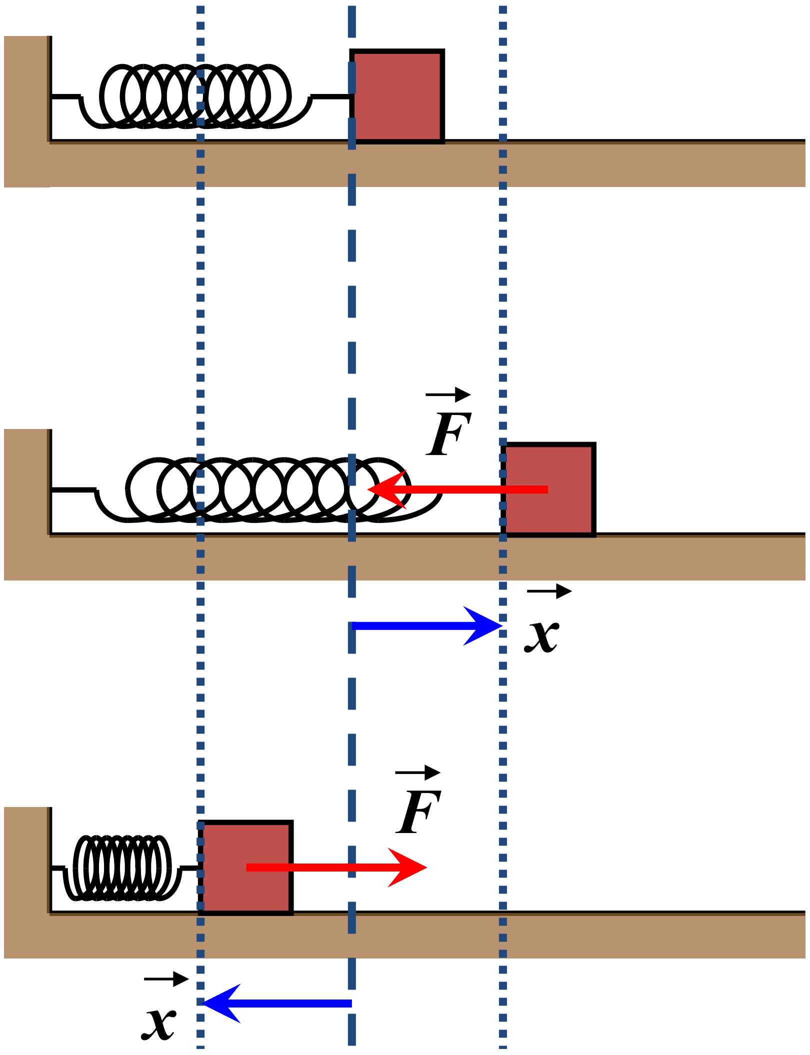
DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Forza elastica

- ✓ Quando una molla è deformata tende a ripristinare il suo stato di riposo esercitando una <u>forza</u> di richiamo.
- ✓ Per piccole deformazioni, la forza di richiamo risulta proporzionale allo spostamento dell'estremo libero della molla dalla posizione di riposo (legge di Hooke):

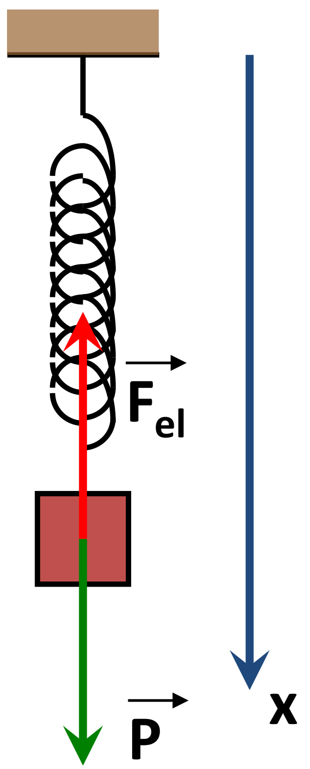
$$\vec{F} = -k\,\vec{x}$$

dove k = costante elastica



DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Equilibrio di un corpo appeso ad una molla



Prima legge di Newton:

$$\vec{P} + \vec{F}_{el} = 0$$

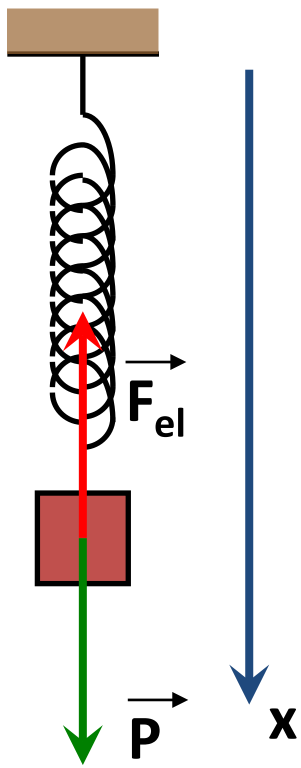
$$mg - kx = 0 \Rightarrow x = \frac{mg}{k}$$

Nella posizione di equilibrio la molla è allungata di:

$$x = \frac{mg}{k}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Equilibrio di un corpo appeso ad una molla



Equazioni del moto:

$$\vec{P} = m \bullet \vec{g}$$

$$\vec{F}_{el} = -k\square\vec{x}$$

$$\vec{F} = m\square\vec{a}$$

Dall'equazione della dinamica per l'equilibrio

$$\mathrm{mg} = \mathrm{m}a - \mathrm{kx}$$

Il moto e' di tipo armonico come sin o cos più una soluzione particolare.

Se la gravità non agisce (piano orizzontale) l'equazione è semplicemente armonica.

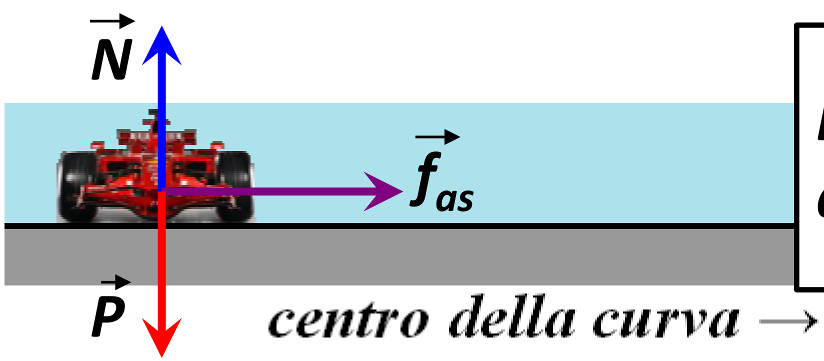
Per approfondire:
Equazione del moto si determina risolvendo la seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2} - \varpi^2\mathrm{x} = \mathrm{g}, \qquad \text{dove} \quad \varpi^2 = \mathrm{k}/\mathrm{m}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE
Forze centripete

Una particella in moto circolare uniforme è soggetta ad una accelerazione centripeta **<u>a = v²/R</u>**

Esempio: la forza che permette ad un'automobile di percorrere una curva è l'attrito statico tra i pneumatici e l'asfalto



Equazioni del moto:

$$\vec{N} - \vec{P} = 0$$

$$f_{as} = \mu_s N = \mu_s M g$$

$$f_c = M\frac{v^2}{R}$$

$$f_c = f_{as} \Rightarrow \mu_s M\,g = M\frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\mu_s g R}}$$

Velocità massima

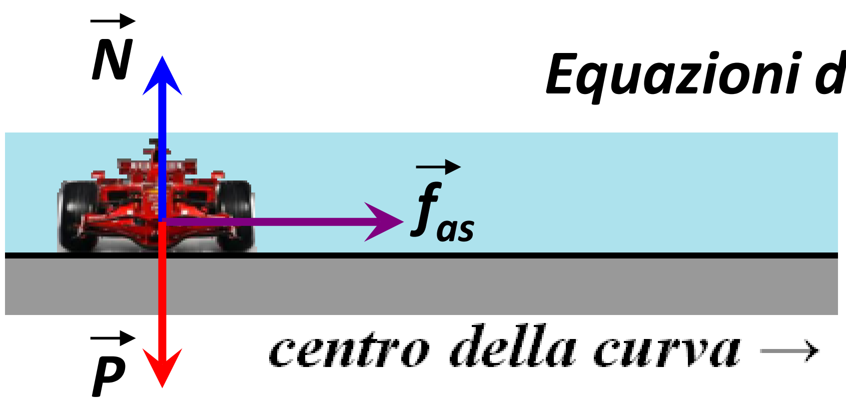
DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Forze centrifuga

Una particella in moto circolare uniforme è soggetta ad una accelerazione centrifuga per un osservatore non inerziale solidale con la particella stessa

Una **forza centrifuga** tiene il corpo "fermo" nel sistema di riferimento non inerziale.

Esempio: l'attrito statico tra i pneumatici e l'asfalto cessa (perdita di aderenza) la macchina esce fuori strada in curva:



Equazioni del moto:

$$f_{Apparente} = -m\frac{v^2}{R}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Urto elastico

In un urto elastico si conserva l'energia cinetica del sistema

- Conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

- Conservazione dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

Velocità finali:

$$V_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$V_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Se $m_1 = m_2$ allora $V_1 = v_2$ e $V_2 = v_1$ (i corpi si scambiano le velocità)

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Urto elastico con bersaglio fisso

In questo caso $v_2=0$ e le formule per le velocità finali diventano:

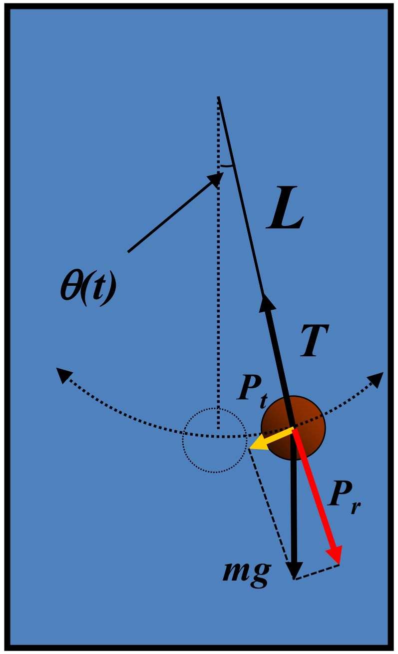
$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

- **Se $m_1 = m_2$:** $V_1 = 0$ e $V_2 = v_1$ (i corpi si scambiano le velocità)
- **Se $m_2 >> m_1$:** $V_1 \approx -v_1$ e $V_2 \approx 0$ (il proiettile rimbalza sul bersaglio e torna indietro con velocità in modulo uguale a quella iniziale)
- **Se $m_2 << m_1$:** $V_1 \approx v_1$ e $V_2 \approx 2v_1$ (il proiettile prosegue il suo moto indisturbato e il bersaglio schizza via con velocità pari al doppio della velocità iniziale del proiettile)

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Pendolo

Il pendolo è costituito, idealmente, da un punto materiale di massa m, sospeso a distanza L per mezzo di un filo inestensibile e privo di massa.



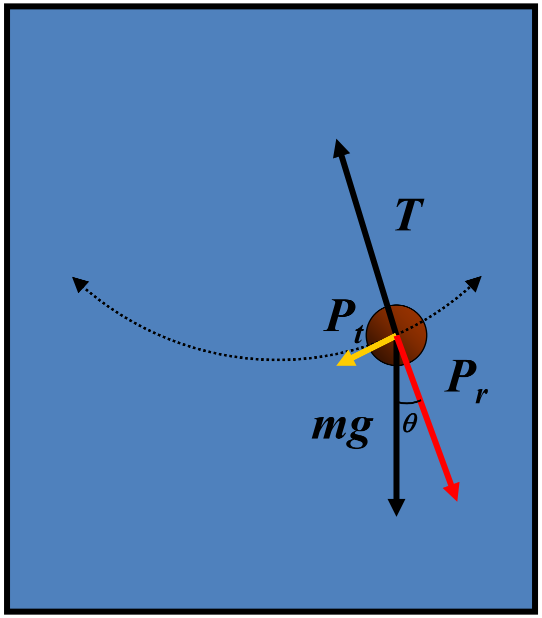
Le forze che agiscono sulla massa la forza peso e la tensione del filo, come illustrato in figura.

Il moto della massa e' vincolato dal filo su un arco di circonferenza.

Per la descrizione del moto possiamo utilizzare come variabile l'angolo formato dal filo con la direzione verticale.

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Pendolo



Quando il pendolo è scostato di un angolo θ, scomponendo la forza peso nelle componenti P_t tangente alla traiettoria e P_r nella direzione del filo. La posizione chiaramente non risulta d'equilibrio infatti:

Lungo il filo le forze sono equilibrate $\mathbf{P_r=T}$

Mentre $\mathbf{P_t}$ provoca il moto verso il centro

$\mathbf{P_t}$ è diretta sempre verso la posizione di riposo anche quando si trova nella posizione opposta a quella in figura.

Ovviamente si istaura un moto oscillatorio di tipo semplice e perpetuo se le condizioni permangono come in premessa (assenza di resistenze passive.

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE
Pendolo

Si può dimostrare che per piccole oscillazioni il modulo che muove il pendolo è:

$$F = -\frac{m \cdot g}{l} s$$

Dove: m = massa pendolo   l = lunghezza pendolo
s = spostamento orizzontale

In base al secondo principio della dinamica F = ma:

$$m \cdot a = -\frac{m \cdot g}{l} s \Rightarrow a = -\frac{\cancel{m} \cdot g}{\cancel{m} \cdot l} s \Rightarrow a = -\frac{g}{l} s$$

Confrontando l'accelerazione ricavata con $a=\omega^2 s$ valida per tutti i moti oscillatori, si ottiene:

$$\omega^2 = -\frac{g}{l} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Pendolo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

T è il periodo del pendolo, indipendente dall' ampiezza delle oscillazioni

ω è la pulsazione ed è data dalla famosa relazione:

f è la frequenza anche essa non dipende dalla massa ma solo dall'accelerazione di gravità e dalla lunghezza del filo.

Da questo risultato valido per piccole oscillazioni del pendolo sono descritte da una sinusoide. **Il moto del pendolo e' quindi oscillatorio**

Il pendolo semplice rappresenta il primo orologio, ovvero il primo semplice (ma preciso) sistema di misura del tempo.

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Pendolo applicazione-energia meccanica

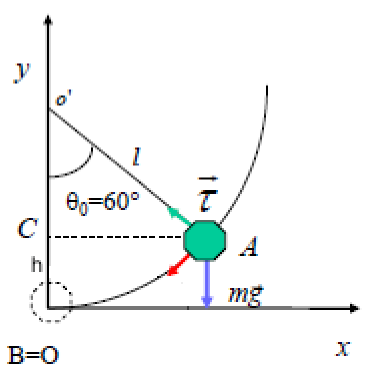
Abbiamo visto che la forza gravitazionale è conservativa, di conseguenza l’energia meccanica rimane costante.

$$E_{mi} = E_{mf}$$

$$E_{mi} = \frac{1}{2} m \cdot v_i^{\,2} + m \cdot g \cdot h_i$$

$$E_{mf} = \frac{1}{2} m \cdot v_f^{\,2} + m \bullet g \cdot h_f$$

Uguagliando l’energia meccanica iniziale e finale ricordando che V_i=0 e h_f=0 e semplificando si ottiene



$$\frac{1}{2} \cancel{m} \cdot v_i^{\,2} + \cancel{m} \cdot g \cdot h_i = \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot v_f^{\,2} + \cancel{m} \bullet g \cdot h_f$$

Da cui:

$$g \cdot h_i = \frac{1}{2} \cdot v_f^{\,2} \Rightarrow V_f = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_i}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

(La gravitazione universale)

L'espressione matematica della legge di gravitazione universale è:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

F forza di gravitazione universale

G è la costante di gravitazione universale [Nm^2/kg]

m_1 massa del primo corpo [kg]

m_2 massa del secondo corpo [kg]

r^2 distanza tra i due corpo [m]

la costante di gravitazione universale *G* vale :

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

La legge si esprime: la forza di attrazione tra due masse è direttamente proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

(Legge di gravitazione universale calcolo della massa della terra)

E' possibile calcolare la massa della Terra partendo dalla legge di gravitazione universale e dalla conoscenza del valore di g alla sua superficie:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$G = 6.67\cdot10^{-11}$ [N·m²/kg²]

$g = 9.81\cdot$[N·m²/kg²]

$r = 6.38\cdot10^{-11}$ [m]

Considerando la forza di attrazione tra la terra di massa m_T e un corpo di massa m sulla terra ad una distanza dal centro della terra r (raggio medio della terra)

Forza peso

$$\cancel{m}g = G\frac{\cancel{m}\cdot m_T}{R_T^{\,2}} \Rightarrow \qquad m_T = \frac{R_T^{\,2}g}{G} = \frac{(6.38\cdot10^{6}\,\mathrm{m})^2\,9.80\ \mathrm{m/s^2}}{6.67\cdot10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}} = 5.98\cdot10^{24}\,\mathrm{kg}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

L'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra

E' possibile calcolare il valore di g sulla superficie terrestre:

Ricordando che:

$$F_g = G\frac{m \cdot m_T}{r^2}$$

$$F_p = m \cdot g$$

Ponendo F_g=F_p:

$$\cancel{m} \cdot g = G\frac{\cancel{m} \cdot m_T}{r^2}$$

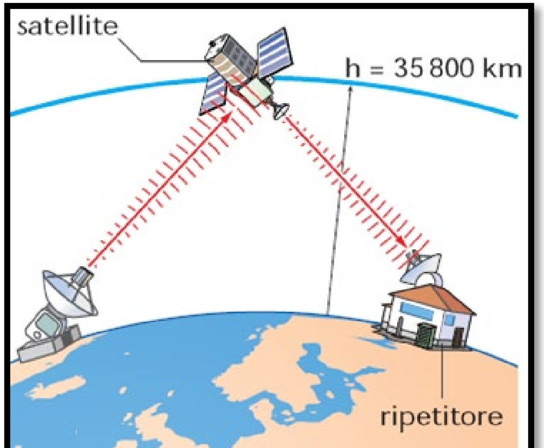
$$g = G\frac{m_T}{r^2} = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

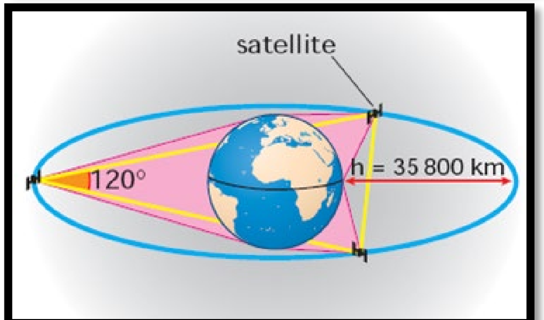
Il valore dell'espressione pari a g=9,81 [m/s2] corrisponde proprio al valore sperimentale di *g* nel caso particolare della legge di gravitazione, in prossimità della superficie terrestre.

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

(Calcolo orbita e velocità per i *satelliti geostazionari)*

Sono satelliti che si muovono alla velocità di rotazione terrestre, quindi appaiono fermi rispetto alla Terra. Per il calcolo dell'altezza e della velocità si parte dalla dalla legge di gravitazione universale. Si suppone che il satellite abbia orbita circolare; massa m_S e distanza dal centro della Terra R_S; T è il suo periodo di rivoluzione intorno alla Terra.





Sono satelliti

$$T = 24\,\text{h} \cdot 3600\,\text{s/h} = 86400\,\text{s}$$

$$G\frac{m_S m_E}{R_S^{\ 2}} = m_S \omega^2 R_S = m_S\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_S$$

$$R_S^{\ 3} = \frac{G \cdot m_E \cdot T^2}{4\pi^2} \qquad R_S = 4.23 \cdot 10^7\ \text{m}$$

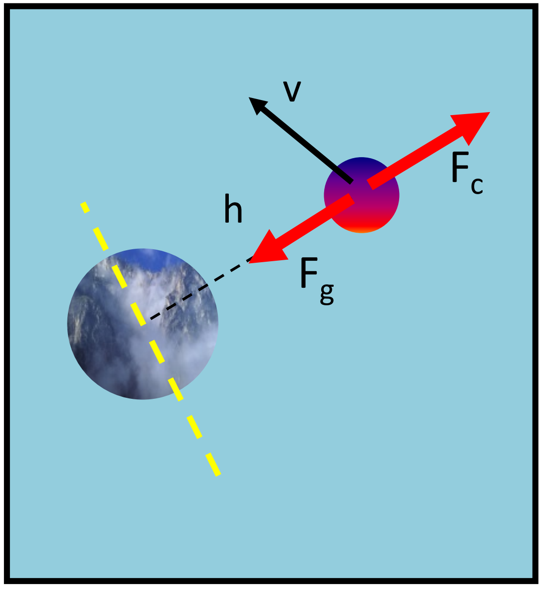
$$v = \omega R_S = \frac{2\pi}{T} R_S = 3070\,\text{m/s}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Satellite su un' orbita circolare

Consideriamo un satellite in orbita con velocità costante intorno alla Terra. Quale deve essere la sua velocità affinché esso sia vincolato su una traiettoria circolare a una quota h dalla superficie?

La forza che la Terra esercita sul satellite e' data dalla legge di gravitazione universale:



Le forze Fg e Fc (centrifuga e gravitazionale) che agisce sul satellite essendo solo radiali, possiamo limitare lo studio lungo tale direzione dove.

$$F_C = m\frac{V^2}{h}$$

$$\mathbf{F}_g = G\frac{M_T \cdot m_s}{h^2}$$

$$F_C = F_g$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Satellite su un’ orbita circolare

Da questa equazione che esprime la condizione di equilibrio radiale si ricava il valore della velocità del satellite.

$$\cancel{m_S}\frac{V^2}{\cancel{h}} = G\frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{h^{\cancel{2}}} \Rightarrow V = \sqrt{G\frac{M_T}{h}}$$

Questa equazione ci dice che la velocità del satellite dipende dalla distanza h del satellite dal centro della terra.

- ✓ Aumenta h diminuisce la velocità
- ✓ Diminuisce h aumenta la velocità

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Pendolo balistico

Il pendolo balistico è usato per misurare la velocità dei proiettili

➢ Il proiettile penetra nel blocco di legno (urto completamente anelastico):

$$V = \frac{mv}{M+m}$$

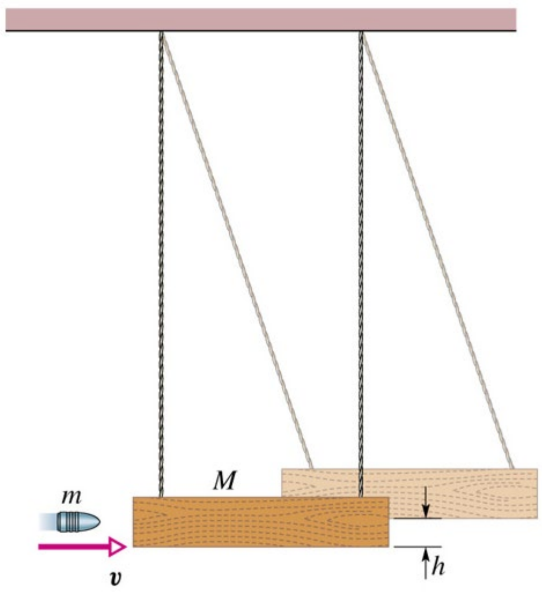
(applicazione del principio della conservazione della quantità di moto)

➢ Il proiettile penetra nel blocco di legno (urto completamente anelastico):

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh$$

(applicazione del princ. della cons. della energia meccanica

Ricavando V dalla seconda equazione e sostituendo nella prima:



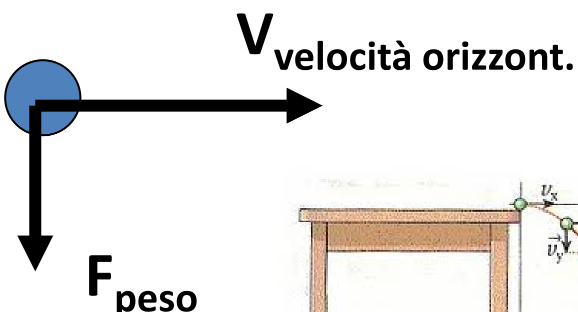
$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}$$

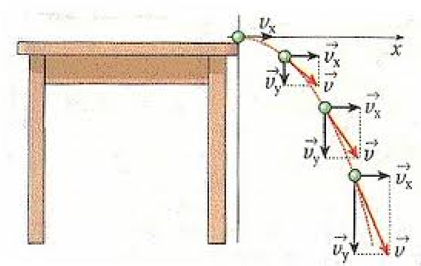
DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE
(Moto parabolico)

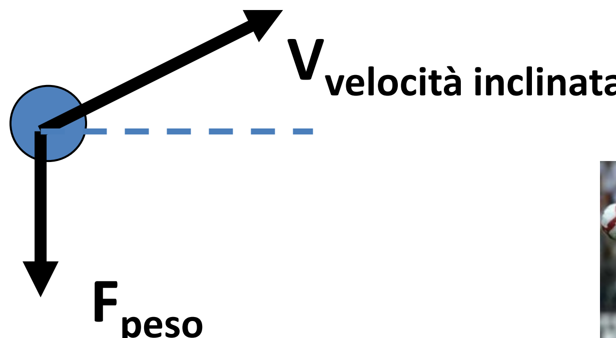
Il moto parabolico è un moto composto piano: moto rettilineo uniforme orizzontale + caduta libera verticale

Esempi:

- ✓ lancio oggetto da un'altura
- ✓ Proiettile sparato da un mortaio
- ✓ Pallone calciato da un giocatore



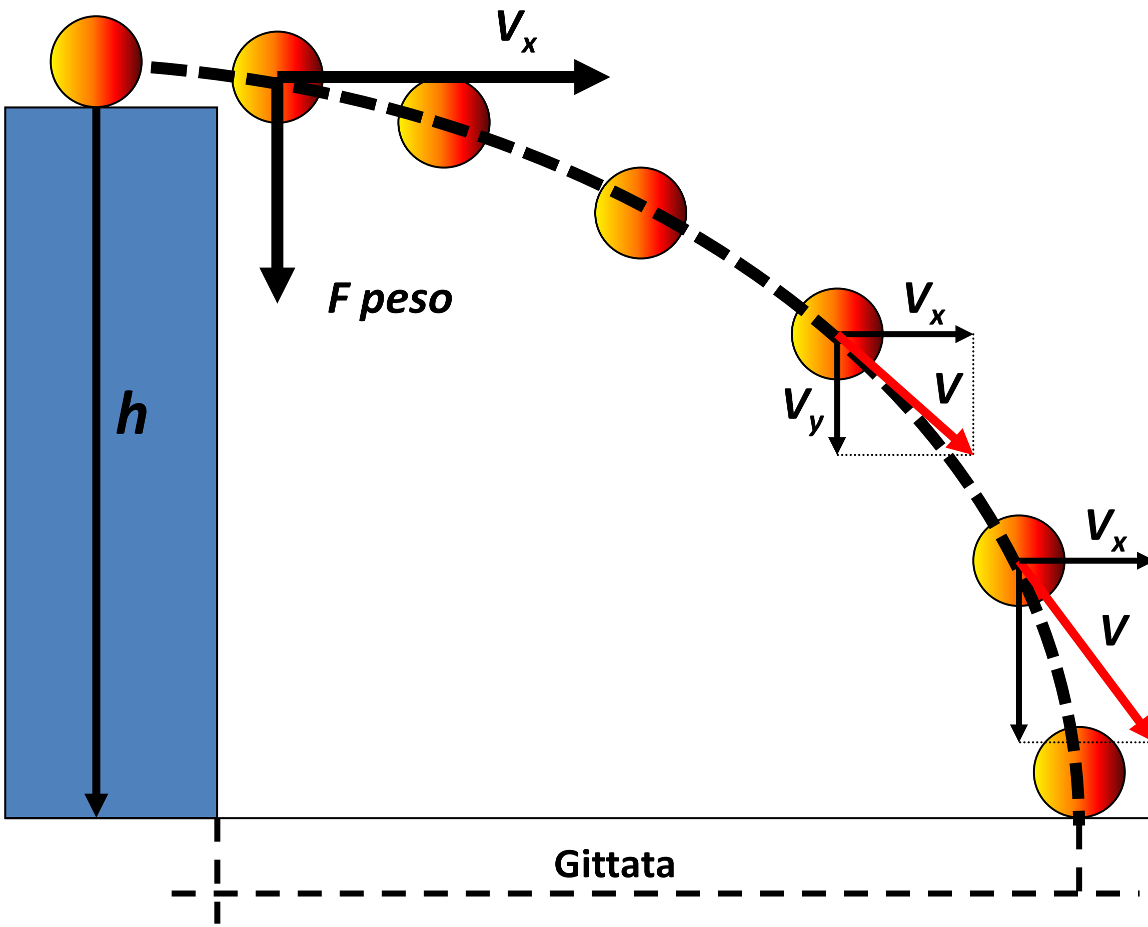




DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

(Moto parabolico)

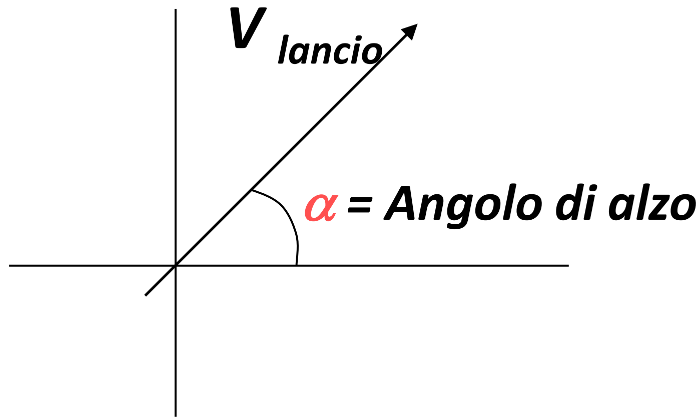
Lancio massa m con velocità v_x orizzontale e v_y = 0 verticale sotto l'azione solo della forza peso.



Al passare del tempo la velocità v_y cresce (perche agisce la forza di gravità) mentre v_x rimane invariata in quanto nella direzione x non agiscono forze. V= (v_x + v_y) dà la velocità risultante sempre più inclinata come si vede in figura.

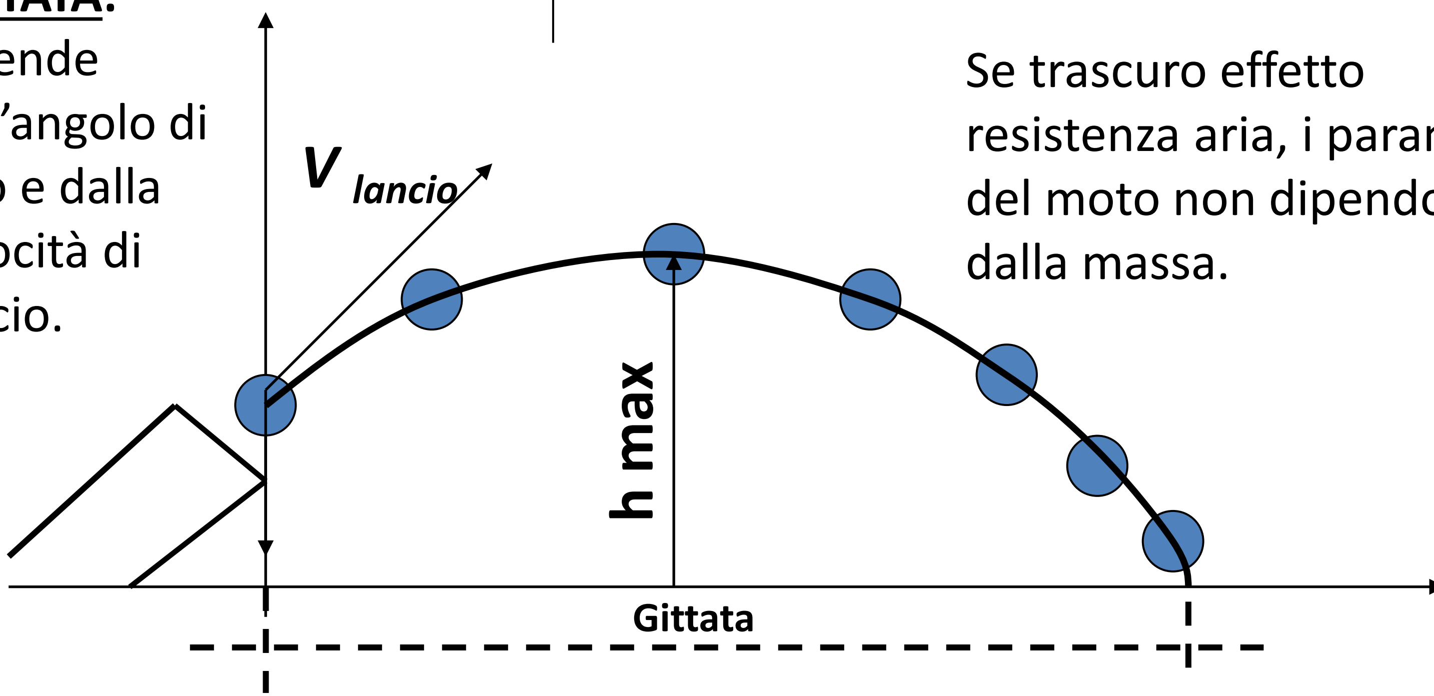
DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

(Moto parabolico moto dei proiettili)



La traiettoria è una **parabola** con vertice nel punto di max altezza

GITTATA: dipende dall'angolo di alzo e dalla velocità di lancio.

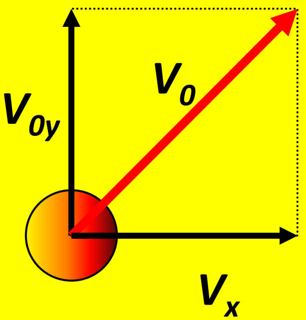


Se trascuro effetto resistenza aria, i parametri del moto non dipendono dalla massa.

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

(Moto parabolico proiettile con velocità iniziale inclinata)

Nel caso del proiettile lanciato da terra con angolo iniziale α=45°, scomponendo la velocità V_0 = 30 [m/s] in V_{0x} e V_{0y}:



In questo caso di angolo particolare iniziale (α=45°) i valori delle componenti risultano uguali .

$$V_{0x} = V_{0y} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = 21{,}2[m/s]$$

Le equazioni del moto piano detto parabolico (moto composto) risultano :

- ✓ ***Asse X:*** ***moto rettilineo uniforme***
- ✓ ***Asse Y:*** ***moto uniformemente ritardato (fase ascendente)***

$$\begin{cases} X = V_{0x} \cdot t \\ Y = V_{0y} \cdot t - \dfrac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

(Moto parabolico proiettile con velocità iniziale inclinata)

Per determinare la quota massima raggiunta dal proiettile basta osservare che, quando il proiettile è nel punto più alto della sua traiettoria, è $v_y = 0$.

Dall'equazione della velocità lungo y abbiamo e possiamo perciò ricavare il tempo:

$$V_y = V_{0y} - g \cdot t = 0$$

$$t = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{21,2}{9,81} = 2,16[s]$$

Sostituendo il valore trovato per t nell'equazione del moto lungo y troviamo l'espressione della quota massima:

$$Y = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 21,2 \cdot 2,16 - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 2,16^2 = 22,91[m]$$

Per il calcolo della gittata considerando che il tempo è il doppio di quello calcolato (tempo salita uguale tempo discesa) t_t=2*t=2*2,16=4,32 [s].
Dall'equazione dell'ascissa (X)

$$X_{(gittata)} = V_{0x} \cdot t_t = 21,2 * 4,32 = 91,58[m]$$