

CORSO DI FISICA GENERALE

TEORIA DEGLI ERRORI LEZIONE N 4

FISICA IN PILLOLE: TEORIA DEGLI ERRORI

Il processo di indagine dei fenomeni fisici passa per la quantificazione delle grandezze che lo caratterizzano.

La misura di qualsiasi grandezza fisica permette per qualsiasi sistema fisico:

1. Conoscere;
2. Descrivere;
3. Controllare;
4. Confermare una teoria;
5. Prevedere l'evoluzione di un fenomeno.

È di fondamentale importanza in fisica che il valore della misura eseguita sia accompagnata dalla consapevolezza dei limiti di validità.

Per rispondere a queste necessità è stata formulata la **Teoria degli Errori** che:

1. studia la natura degli errori che ricorrono nella pratica applicativa;
2. deduce i procedimenti e le caratteristiche degli strumenti per ottimizzare le risorse economiche (minimo impegno per ottenere valutazioni sufficienti allo scopo della misura);
3. sviluppa le tecniche per il trattamento dei dati misurati al fine di pervenire a:
 - misura della grandezza;
 - attendibilità della misura fornita.

FISICA IN PILLOLE: TEORIA DEGLI ERRORI

- Ogni misura, per quanto accurata e precisa, è affetta da errore.
- Errore non è sinonimo di “sbaglio”, ma sta ad indicare proprio che ogni strumento di misura, per diverse cause, ha dei “limiti” nel misurare.
- Basta pensare, ad esempio, alla sensibilità.
- E' quindi impossibile ottenere il valore “reale” della misura di una qualsiasi grandezza fisica.

Gli errori sono la differenza fra il risultato di una misura e il valore vero cercato. → ERRORE = MISURA REALE - MISURA

FISICA IN PILLOLE: TEORIA DEGLI ERRORI

La “**teoria de gli errori**” aiuta a valutare e minimizzare gli errori nei procedimenti di misura

Per minimizzare gli errori al fine di rendere adeguata l'incertezza della misura rispetto all'uso che se ne deve fare.

Problemi di questo tipo possono presentare aspetti e livelli di complicazione diversissimi, e quindi richiedere l'uso delle tecniche più svariate che non si esauriscono con questa lezione.

FISICA IN PILLOLE: LA MISURA

Per eseguire una corretta misura bisogna:

1. Conoscere l'unità di misura;
2. Conoscere le proprietà della grandezza da misurare;
3. Conoscere lo strumento di misura e scegliere quello più appropriato;
4. Usare un operatore esperto per effettuare la misura;
5. Saper interpretare la lettura della misura;
6. determinare correttamente l'incertezza di misura e le cifre significative con cui esprimere il risultato.

FISICA IN PILLOLE: STRUMENTI DI MISURA

LE CARATTERISTICHE DEGLI STRUMENTI DI MISURA

RIPETIBILITÀ



Con il termine ripetibilità (affidabilità) si intende la capacità dello strumento di fornire misure uguali della stessa grandezza.

PRONTEZZA



In generale la prontezza rappresenta la rapidità con cui è lo strumento è in grado di fornire il risultato di una misura.

SENSIBILITÀ



La sensibilità la più piccola misura che lo strumento può rilevare

RISOLUZIONE



La risoluzione di uno strumento rappresenta la minima variazione apprezzabile della grandezza. Se la scala dello strumento lineare la risoluzione è costante lungo tutto il campo di misura e risulta numericamente uguale alla sensibilità.

FONDO SCALA



Il fondo scala rappresenta il limite superiore del campo di misura e prende anche il nome di portata dello strumento.

PORTATA



La portata è la più grande misura che lo strumento può rilevare.

PRECISIONE



Come abbiamo già detto, ad ogni misura è associata inevitabilmente una incertezza. Può essere espresso dal rapporto tra l'errore assoluto e la misura. Il risultato è un numero adimensionale (privo cioè di unità di misura). Prende il nome di precisione o errore relativo.

FISICA IN PILLOLE: VALORE VERO DI UNA MISURA?

Se si esegue più volte la misura di una stessa quantità, **si ottengono spesso risultati diversi.**

L'approccio metodologico per determinare il più probabile valore della grandezza, può essere:

1. Il trattamento statistico
2. La teoria degli errori

CAUSE DELLA VARIABILITA'

1. Soggetto, che esegue la prova ogni volta in modo leggermente diverso.
1. Perturbazioni ambientali (variazioni di temperatura, pressione, umidità)
2. Limitazioni tecnologiche della strumentazione (imperfezioni costruttive, instabilità della taratura, ecc.);
3. Imperizia dell'operatore.

FISICA IN PILLOLE: VARIABILITA' DEL RISULTATO

RICORDARE CHE:

1. Non possibile determinare in modo assolutamente certo il valore della grandezza da misurare.
2. La misura può essere affetta da un **errore**.
3. La misura è **sempre** affetta da un certo grado di **incertezza**.
4. Il valore della misura non rappresenta il “valore vero” ma la sua **stima**.

FISICA IN PILLOLE: DEFINIZIONE D'ERRORE

ERRORE ASSOLUTO

$$e_a = \frac{S}{M} \quad e_a = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{M}$$

l'errore assoluto ci offre una stima efficiente del "peso" dell'errore stesso sulla misura .

S= sensibilità M=misura in caso di una serie di misure V_{\max} =valore massimo misurato V_{\min} =valore minimo misurato.

ERRORE RELATIVO

$$e_r = \frac{e_a}{M}$$

Non sempre l'errore assoluto ci offre una stima efficiente del "peso" dell'errore stesso sulla misura. È più grave commettere un errore di 1 cm su 1 m, o di 1 m su 1 km? Sicuramente è più grave il primo. Perché?

Chiamiamo Errore Relativo e_r il rapporto:

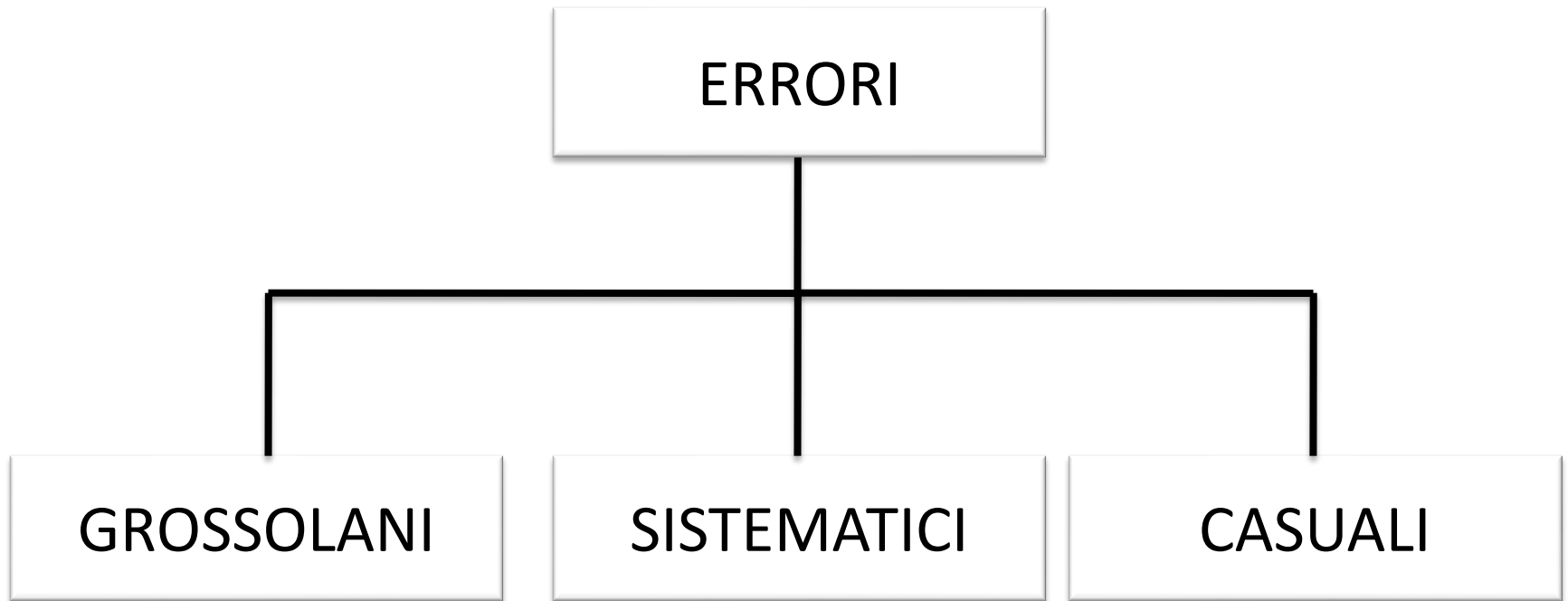
ERRORE PERCENTUALE

$$e_p = e_r \cdot 100$$

Quando si fanno tante misure di una grandezza, siamo in grado di scartare quelle misure che sono fuori da un intervallo accettabile. L'Errore Percentuale ε_p , definito come segue, ha proprio questo scopo:

si esprime come percentuale, simbolo "%".

FISICA IN PILLOLE: CLASSIFICAZIONE DEGLI ERRORI



FISICA IN PILLOLE: ERRORE GROSSOLANO

Sono quegli errori che si presentano enormemente grandi rispetto alla misura

- Possono essere causati da letture errate del visualizzatore, dall'uso improprio degli strumenti, da trascrizioni sbagliate del risultato o da imprecisioni nell'elaborazione numerica o nella rappresentazione
- Sono spesso addebitabili alla distrazione o all'inesperienza
- Possono essere eliminati conducendo le misure con cura ed attenzione

FISICA IN PILLOLE: ERRORE SISTEMATICO

Un errore si dice sistematico quando si presenta sempre con lo stesso segno e lo stesso valore , ripetendo la misura con gli stessi strumenti

- Le cause possono essere imputate sia agli strumenti che ad interferenze dovute all'ambiente. Un cronometro tarato male, per esempio per difetto, avrà sempre la tendenza a stimare misure di tempo eccedenti rispetto alla realtà. Un righello deformato dal caldo non può offrire ovviamente una misura corretta.
- Si possono limitare se si conosce una stima attendibile della quantità da misurare e la relazione che lega il valore del misurando al valore della misura.

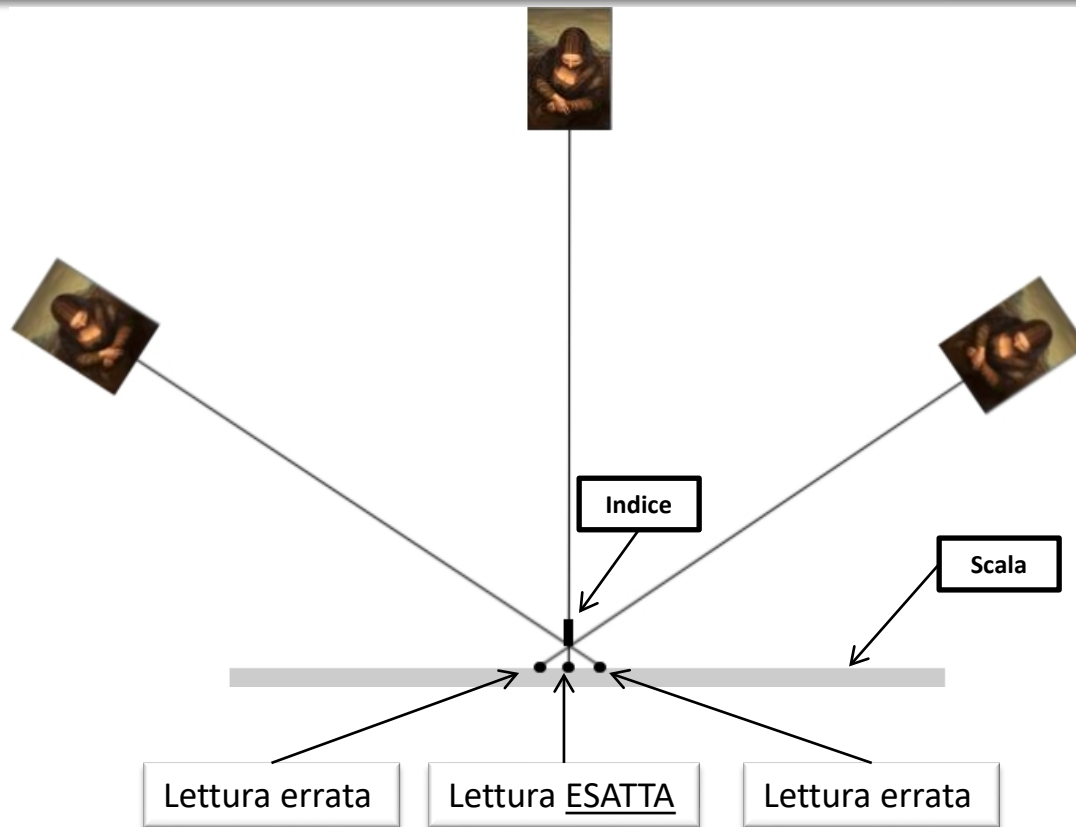
FISICA IN PILLOLE: ERRORE CASUALE

Un errore si dice accidentale se variazioni casuali ed imprevedibili delle condizioni in cui si effettua la misura.

- Non possono mai essere completamente eliminati
- La causa è imputabile al rilevatore o all'ambiente
- il loro effetto si può ridurre usando le tecniche della statistica (ad esempio ripetendo più volte la misura ed effettuando la media dei valori ottenuti)

FISICA IN PILLOLE: ESEMPIO DI ERRORE CASUALE

La figura mostra la diversa lettura che si ottiene osservando la scala dello strumento da angolazioni diverse.



Gli strumenti di precisione hanno una porzione della scala riflettente allo scopo di minimizzare tale effetto.

FISICA IN PILLOLE: TEORIA DEGLI ERRORI

Le misure ottenute con strumenti di misura, come detto, sono inevitabilmente affette da errori. Esistono però dei metodi, descritti dalla teoria degli errori, che servono a limitare al minimo l'incidenza degli errori stessi sulle misure.

DI SEGUITO TRATTEREMO:

1. Valor Medio
2. Errore Assoluto
3. Intervallo di Incertezza
4. Errore Percentuale.
5. Errore Relativo



FISICA IN PILLOLE: VALORE MEDIO

Supponiamo di aver eseguito n misure di una stessa grandezza con uno strumento di misura. L'insieme delle misure è il seguente:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Definiamo Valore Medio G il rapporto

$$G = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Somma di tutte le n misure divise per n (numero di misure)

FISICA IN PILLOLE: ERRORE ASSOLUTO

In un insieme delle stessa misura (misura rilevata n volte) $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ c'è sempre una misura più grande, x_{\max} , ed una più piccola, x_{\min} .

Si definisce Errore Assoluto e_a (o Semidispersione Media) il rapporto

$$e_a = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

Nel caso la misura si esegue una sola volta l'errore assoluto si assume pari alla sensibilità dello strumento di misura

$$e_a = S \leftarrow \text{sensibilità dello strumento di misura}$$

FISICA IN PILLOLE: INTERVALLO D'INCERTEZZA

Come abbiamo detto, non è possibile ottenere una misura esatta. Risulta allora utile ottenere un intervallo minimo in cui siamo sicuri che ricade la misura esatta.

Questo intervallo, detto Intervallo di Incertezza, è il seguente:

$$x = G \pm e_a$$

Dove x indica la misura esatta, G il valore medio e e_a l'errore assoluto.

FISICA IN PILLOLE: INTERVALLO D'INCERTEZZA

Una misura si scrive nel modo seguente:

$$m = 12.51 \pm 0.02 [kg]$$

significa che il valore della massa m che si sta cercando è tale che

$$12.49 [kg] \leq m \leq 12.53 [kg]$$

ossia che la massa m ha un valore compreso tra i 12.49 kg e i 12.53 kg

FISICA IN PILLOLE: ERRORE RELATIVO

Non sempre l'errore assoluto ci offre una stima efficiente del "peso" dell'errore stesso sulla misura.

È più grave commettere un errore di 1 cm su 1 m, o di 1 m su 1 km?

A questo scopo si introduce l'errore relativo definito come:

$$e_r = \frac{e_a}{G}$$

Errore Relativo ε_r è il rapporto tra l'errore assoluto e la misura

FISICA IN PILLOLE: ERRORE RELATIVO

Ora diamo la risposta al precedente quesito ossia:
È più grave commettere un errore di **1 cm su 1 m**, o di **1 m su 1 km**?

Nel primo caso abbiamo un errore relativo

$$e_r = \frac{0.01 \text{ [m]}}{1 \text{ [m]}} = 0.01$$

mentre nel secondo caso abbiamo

$$e_r = \frac{1 \text{ [m]}}{1000 \text{ [m]}} = 0.001$$

Risposta: l'errore più grave è quello del primo caso, in quanto, l'errore relativo è più grande del secondo caso

FISICA IN PILLOLE: ERRORE PERCENTUALE

L'errore relativo percentuale $e_{p\%}$ è definito come l'errore relativo x 100

$$e_{r\%} = e_r \cdot 100$$

e si esprime come percentuale, cioè col simbolo “%”.

Quando si fanno tante misure di una grandezza, siamo in grado di scartare quelle misure che sono fuori da un intervallo accettabile.

FISICA IN PILLOLE: ERRORE PERCENTUALE

Tornando al calcolo dell'errore relativo precedente
ossia:

$$e_{r1\%} = 0.01 \quad e_{r2\%} = 0.001$$

possiamo calcolare gli errori relativi percentuali:

primo caso:

$$\varepsilon_{r1\%} = \varepsilon_{r1} \cdot 100 = 0.01 \times 100 = 1\%$$

secondo caso:

$$\varepsilon_{r2\%} = \varepsilon_{r2} \cdot 100 = 0.001 \times 100 = 0.1\%$$

FISICA IN PILLOLE: ERRORI

RICORDARE

1. hanno la stessa unità di misura della grandezza misurata:

- Il valor medio,
- l'errore assoluto
- l'intervallo di incertezza



**obbligatorio
specificarla
sempre**

2. sono numeri “puri”, ossia non possiedono alcuna unità di misura:

- L'errore relativo
- l'errore percentuale

FISICA IN PILLOLE: ARROTONDAMENTO DELLE MISURE

Quante cifre bisogna indicare dopo la virgola, per indicare correttamente una misura?

I CASI SONO DUE

MISURA DIRETTA

La lettura dello strumento indica le cifre.

MISURA
INDIRETTA

cifre sono quante sono quelle relative alla sensibilità dello strumento col quale si è misurato, di conseguenza è necessario eseguire degli “arrotondamenti”.

FISICA IN PILLOLE: ARROTONDAMENTO DELLE MISURE INDIRETTE

Le cifre da mantenere dipendono dall'operazione eseguita per determinare la misura indiretta

MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE

(stesse cifre significative della misura)

⇒ Misura / numero → $A = \frac{30[m]}{7} = 4,285714286 = 4[m]$

⇒ Misura X numero → $A = 30,87[s] \times 4 = 123,48 = 123,5[s]$

MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE

(stesso numero di cifre significative della misura meno precisa)

⇒ Misura X Misura → $A = 3,0[m] \times 6,580[m] = 19,74 = 20[m]$

⇒ Misura / Misura → $A = \frac{48,3[m]}{4,753[m]} = 10,162003 = 10,2[m]$

SOMMA E SOTTRAZIONE

(prima è necessario arrotondare tutti le misure alla cifra significativa meno precisa poi sommare)



$$A = 3,0[m] + 10[m] + 12,44[m] - 5[m] = 20[m]$$








$$A = 3[m] + 10[m] + 12[m] - 5[m] = 20[m]$$

FISICA IN PILLOLE: CIFRE SIGNIFICATIVE

Si dicono Cifre Significative di una misura le cifre “certe” e la prima “incerta”, in riferimento all’intervallo di incertezza.

In generale, il numero delle cifre significative si trova contando la cifra incerta e le cifre che stanno alla sua sinistra fino all’ultima cifra, se essa è diversa da zero.

VEDIAMO QUANTE SONO LE CIFRE SIGNIFICATIVE DEI SEGUENTI NUMERI

52.45		4 cifre significative
57.3		3 cifre significative
0.34		2 cifre significative
0.330		3 cifre significative
33.073		5 cifre significative
10.0210		6 cifre significative
0.002		3 cifre significative

FISICA IN PILLOLE

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Tutte le misure dirette di grandezze sono affette da errori, abbiamo visto come si determinano, quando da esse si ricavano misure indirette anche esse sono affette da errori.

Diremo quindi che gli errori di misura sulle misure dirette si sono **propagati** alle misure indirette.

VEDIAMO COME SI CALCOLANO GLI ERRORI (INCERTEZZE) A SEGUITO DI OPERAZIONI MATEMATICHE TRA MISURE DIRETTE.

Per determinare l'incertezza propagata è necessario eseguire due fasi:

1. Determinare delle incertezze (errori) delle grandezze misurate direttamente;
2. Determinare come tali incertezze si propagano attraverso i calcoli.

FISICA IN PILLOLE

PROPAGAZIONE DELL'ERRORE: : SOMMA E DIFFERENZA

Se A è una misura indiretta, ottenuta dalla somma e B dalla sottrazione di due misure L_1 e L_2

$$A = L_1 + L_2$$

$$B = L_1 - L_2$$

L'incertezza relativa è data da:

$$\varepsilon_{aA} = \varepsilon_{aL1} + \varepsilon_{aL2}$$

$$\varepsilon_{aB} = \varepsilon_{aL1} + \varepsilon_{aL2}$$

L'errore assoluto sulla somma A e sulla sottrazione di L_1 e L_2 è uguale alla somma dei relativi errori assoluti di L_1 e L_2

La regola vale anche se le misure sono più di due. Per n misure si ha:

$$\varepsilon_{aA} = \varepsilon_{aL1} + \varepsilon_{aL2} + \varepsilon_{aL3} + \dots + \varepsilon_{aLn} \quad \textit{Idem sottraz.}$$

FISICA IN PILLOLE

PROPAGAZIONE DELL'ERRORE: : SOMMA E DIFFERENZA

DIMOSTRIAMO CON UN ESEMPIO:

Vogliamo sommare due lunghezze:

$$L_1 = 10,01 \pm 0,01 \text{ [m]} \quad L_2 = 20,01 \pm 0,01 \text{ [m]}$$

$$L_1 = 10,01 \pm 0,01 \text{ [m]}$$

$$L_2 = 20,01 \pm 0,01 \text{ [m]}$$

Calcoliamo prima $S_{\max} = L_{2\max} + L_{2\max} = 10,02 + 20,02 = 30,04 \text{ [m]}$



Calcoliamo adesso $S_{\min} = L_{2\min} + L_{2\min} = 10,00 + 20,00 = 30,00 \text{ [m]}$



$$S = 30,00 \div 30,04 \text{ [m]}$$

$$S = 30,02 \pm 0,02 \text{ [m]}$$

$$\epsilon_{as} = \epsilon_{aL1} + \epsilon_{aL2} = 0,01 + 0,01 = 0,02 \text{ [m]}$$

FISICA IN PILLOLE

PROPAGAZIONE DELL'ERRORE: PRODOTTO E QUOZIENTE

Se P è una misura indiretta, ottenuta dal prodotto e D dal quoziente di due misure L_1 e L_2

$$P=L_1 / L_2$$

$$D=L_1 \times L_2$$

L'incertezza relativa è data da:

$$\varepsilon_{rp} = \varepsilon_{rL1} + \varepsilon_{rL2}$$

$$\varepsilon_{rD} = \varepsilon_{rL1} + \varepsilon_{rL2}$$

Gli errori relativi e percentuali di L_1 e L_2 si sommano sempre, indipendentemente dal fatto che la misura X sia ottenuta come prodotto o come quoziente tra L_1 e L_2 .

La regola vale anche se le misure sono più di due. Nel caso sono n si ha:

$$\varepsilon_{rp} = \varepsilon_{rL1} + \varepsilon_{rL2} + \varepsilon_{rL3} + \dots + \varepsilon_{rLn}$$